DEVOIR DE SYNTHESE N°2

EXERCICE N°1 : 10' 3 points

Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant**

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^4+1\right)}{x}=0$

2°) Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\ln(1-\ln x)$ est $]0,e[$.

3°) $\int_e^{e^2}\dfrac{(\ln x)^3}{x}dx$ est égal à 8.

4°) Soit G la fonction définie sur IR par : $G(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt$ et F la fonction définie sur $\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$F(x)=G(\tan x)=\int_0^{\tan x}\dfrac{1}{1+t^2}dt$. Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=1$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Pour tout $n\in IN^*$ on pose $I_n=\int_1^e\dfrac{\left(\ln(x)\right)^n}{x^2}dx$.

1°) Soit la fonction h définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}-h'(x)$ où h' est la fonction dérivé de h.

b) En déduire que $I_1=1-\dfrac{2}{e}$.

2°) a) À l'aide d'une intégration par partie montrer que : $I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$.

b) En déduire la valeur de I_2 et I_3.

3°) Soit l'ensemble $\Gamma=\left\{M(x,y)\in P \text{ tel que } y=\dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} \text{ et } 1\le x\le e\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de Γ autour de l'axe des abscisses. Calculer le Volume $\mathcal{V}$ de S.

4°) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que Pour tout $n\in IN^*$, $0\le I_n\le\dfrac{1}{ne}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn